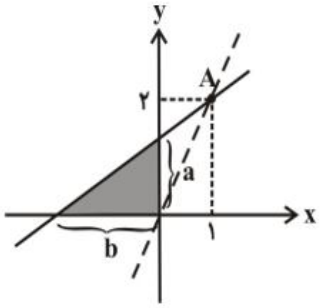
نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **انواع تابع**

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به شکل، برای این که در ناحیه‌ی دوم، مثلثی ایجاد شود، باید شیب خط مثبت بوده و از ۲ کوچک‌تر باشد، در غیر این صورت، در ربع دوم مثلثی با محورهای مختصات ایجاد نمی‌شود، پس $0 < m < 2$.



برای محاسبه‌ی مساحت، ابتدا معادله خط گذرنده از $A(1,2)$ با شیب m را می‌نویسیم.

$$y - 2 = m(x - 1) \Rightarrow y = mx + 2 - m$$

برای محاسبه‌ی طول اضلاع a و b داریم:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 - m \Rightarrow a = 2 - m > 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow b = \frac{2-m}{m} > 0$$

پس مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{(2-m)\times\frac{(2-m)}{m}}{2} = \frac{(m-2)^2}{2m}$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

ضابطه را برابر $y = x$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{2x^2+ax}{(b+1)x^2+cx-1} = x \Rightarrow 2x^2 + ax = (b+1)x^3 + (cx^2 - x)$$

تساوی بالا باید یک اتحاد باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1 \\ ax = -x \Rightarrow a = -1 \\ 2x^2 = cx^2 \Rightarrow c = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = -1 - 1 + 2 = 0$$

دقت کنید دامنهٔ تابع $x \neq \frac{1}{2}$ است.

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با توجه به دامنه و برد، نتیجه می‌گیریم f روی خط گذرنده از دو نقطه $(-۲۱,۷)$ و $(۴,-۳)$ قرار دارد.

ضابطه f را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{۷-(-۳)}{-۲۱-۴} = \frac{-۲}{۵}$$

$$f(x) = -\frac{۲}{۵}x + b \xrightarrow{(۴,-۳)} -۳ = -\frac{۸}{۵} + b \Rightarrow b = -\frac{۷}{۵}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{۲}{۵}x - \frac{۷}{۵} \Rightarrow f(۱) = -\frac{۹}{۵} \Rightarrow ۳f(۱) = -\frac{۲۷}{۵} = -۵/۴$$

$$\Rightarrow [۳f(۱)] = [-۵/۴] = -۶$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

چون دامنهٔ تابع f به صورت $R - \{۵ , b\}$ است، پس $x = ۵$ ریشهٔ مخرج f است:

$$۵^۲ + ۵a - ۱۰ = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

با جای‌گذاری $a = -۳$، مخرج تابع f را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا نیز به دست آید:

$$x^۲ - ۳x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵ \\ x = -۲ \Rightarrow b = -۲ \end{cases}$$

با جای‌گذاری $a = -۳$ و $b = -۲$، معادلهٔ $f(c) = ۱$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^۲-۸x+۳}{x^۲-۳x-۱۰} \xrightarrow{f(c)=۱} c^۲ - ۸c + ۳ = c^۲ - ۳c - ۱۰$$

$$\Rightarrow ۵c = ۱۳ \Rightarrow c = \frac{۱۳}{۵} = ۲/۶$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

دو حالت داریم:

الف) مخرج کسر ریشهٔ مضاعف دارد، پس:

$\Delta = ۰ \Rightarrow ۵^۲ - ۴ \times (m + ۱) \times ۴ = ۰$

$\Rightarrow m + ۱ = \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow m = \frac{۹}{۱۶}$

ب) عبارت مخرج، یک عبارت درجهٔ اول باشد که در این صورت باید ضریب $x^۲$ برابر صفر شود، بنابراین:

$m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = -۱$

پس برای m، ۲ مقدار متمایز وجود دارد.

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳

برای اینکه دامنه تابع f برابر R شود، دو حالت زیر امکان‌پذیر است:

۱) مخرج، تابعی ثابت باشد که فاقد ریشه خواهد بود، که باید:

$\Rightarrow k - ۳ = ۰ \Rightarrow k = ۳$

۲) مخرج، تابعی درجه دوم باشد و چون $b = ۰$ بوده، a و c باید هم‌علامت باشند تا مخرج فاقد ریشه باشد:

$\Rightarrow (k - ۳)(k + ۲) > ۰ \Rightarrow k \in (-\infty, -۲) \cup (۳, +\infty)$

$\Rightarrow$ جواب نهایی $= (-\infty, -۲) \cup [۳, +\infty)$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۳

۱۲۱/۶۰۰/۰۰۰ تومان = ۱۲۱/۶ میلیون تومان

$\Rightarrow \frac{۴۰x}{۱۰۱-x} = ۱۲۱/۶$

$\Rightarrow ۴۰x = ۱۲۲۸۱/۶ - ۱۲۱/۶x \Rightarrow ۱۶۱/۶x = ۱۲۲۸۱/۶$

$\Rightarrow x = \frac{۱۲۲۸۱/۶}{۱۶۱/۶} = ۷۶$ درصد

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

برای این‌که عبارت به ازای هر x حقیقی تعریف شده باشد، باید عبارت درجه دوم در مخرج کسر ریشه نداشته باشد، یعنی $\Delta < ۰$ باشد،پس داریم:

$$A(x) = \frac{۶x^۲-۲x}{-kx^۲+۲x-۹k}$$

مخرج کسر: $\Delta < ۰ \Rightarrow \Delta = ۴ - ۴(-k)(-۹k) < ۰$

$\Rightarrow ۴ - ۳۶k^۲ < ۰ \Rightarrow k^۲ > \frac{۱}{۹} \Rightarrow k > \frac{۱}{۳}$ یا $k < -\frac{۱}{۳}$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۱

تابع در $x = -۱$ تعریف نشده است اما در آن حد دارد. یعنی $x = -۱$، صفر مشترک عبارت‌های صورت و مخرج است.

مخرج : $-۱ + c = ۰ \Rightarrow c = ۱$

صورت : $۲(-۱)^۳ - ۳(-۱)^۲ + a(-۱) + b = ۰ \Rightarrow b - a = ۵ \quad (۱)$

از طرفی عرض از مبدأ تابع برابر با ۳ است. یعنی:

$$f(۰) = \frac{b}{c} = ۳ \xrightarrow{c=۱} b = ۳$$

$$\xrightarrow{(۱)} a = -۲$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۲x^۳-۳x^۲-۲x+۳}{x+۱} = (۲x - ۳)(x - ۱); D_f = R - \{-۱\}$$

$$\Rightarrow f(۲) = ۱$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به حدود دامنه $x = ۱$ ریشه مخرج کسر است:

$$\sqrt{۲x^۲ - ۶x + a} = ۰$$
$$\xrightarrow{x=۱} \sqrt{۲ - ۶ + a} = ۰ \Rightarrow \sqrt{-۴ + a} = ۰$$

$$\rightarrow -۴ + a = ۰ \Rightarrow a = ۴$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^۲+۱}{\sqrt{۲x^۲-۶x+۴}}$$

برای محاسبه دامنه تابع $f(x)$ باید عبارت زیر رادیکال را که در مخرج است، بزرگتر از صفر قرار دهیم، پس:

$$۲x^۲ - ۶x + ۴ > ۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ - ۳x + ۲ > ۰$$
$$\Rightarrow (x - ۱)(x - ۲) > ۰$$

x		۱		۲	
p	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow x < ۱ \text{ یا } x > ۲ \Rightarrow x \in (-\infty, ۱) \cup (۲, +\infty) \Rightarrow b = ۲$$

$$\Rightarrow a \times b = ۴ \times ۲ = ۸$$